## I - Rappel des définitions élémentaires des dénombrements finis.

a/ On appelle **permutation** sans répétition de p éléments toute disposition *ordonnée* de tous ces p éléments.

Le nombre de permutations de p éléments est

$$1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times p = p! \text{ (factorielle p).}$$

b/ On appelle **arrangement** sans répétition de n éléments pris parmi p éléments, toute disposition *ordonnée* de ces éléments pris n à n.

Le nombre d'arrangements sans répétition de n éléments pris dans p éléments est (avec la clause que $n \leq p$)

$$A_p^n = p \text{ x } (p-1) \text{ x} \ldots \text{ x } (p-n+1) = \frac{p!}{(p-n)!}$$

NB – Dans le cas d'arrangements avec répétitions, on peut avoir $n > p$.

Le nombre des arrangements *avec répétitions* de n éléments d'un ensemble de p éléments est

$$p^n$$

Dans *De l'Horizon de la doctrine humaine*, les calculs de Leibniz portent sur le nombre de tous les mots, de toutes les énonciations et de tous les livres possibles : ils ne concernent que la recherche du nombre des arrangements avec répétitions de n caractères (n mesurant la longueur du mot, de l'énonciation ou du livre) d'un alphabet de p lettres (cf. page suivante).

c/ On appelle **combinaison** sans répétition de n éléments pris parmi p éléments toute disposition *non ordonnée* de n éléments.

Le nombre de combinaisons sans répétition de n éléments pris dans p éléments est (avec la clause que $n \leq p$)

$$C_p^n = \frac{p!}{n!\,(p-n)!}$$

**Formules des calculs combinatoires de Leibniz**
**dans *De l'Horizon de la doctrine humaine* :**

[1] Pour un alphabet de 24 lettres, « … généralement le nombre des mots de *n* lettres sera $24^n$ » (p. 43).

Par convention provisoire, on arrête la longueur maximale d'un mot à 32 lettres. Il y aura $24^{32}$ mots possibles.

[2] Somme de tous les mots d'un alphabet de 24 lettres allant de la longueur 1 à la longueur 32.

$$24 + 24^2 + 24^3 + \ldots + 24^{32}$$

= « trouver la somme des nombres de progression Géométrique ».

Or on sait que :

$$24 + 24^2 + 24^3 + \ldots + 24^{32} = \frac{24^{33} - 24}{23}$$

selon la formule générale :

$$p^1 + p^2 + p^3 + \ldots + p^n = \frac{p^{n+1} - p}{p - 1}.$$

[3] Une « énonciation » (vraie ou fausse, signifiante ou non) occupe une page de 20.000 lettres,

on obtient : $\frac{24^{20001} - 24}{23}$ énonciations.

[4] Un « livre » est défini comme ce « qu'un homme pourrait à peine lire durant toute sa vie », en lisant 1000 pages par jour, chacune de 100.000 lettres, et en vivant 1000 ans (*sic*) : la longueur du livre est de 36500.000.000.00 caractères. Le nombre de tous les livres de cette longueur est :

$$\frac{24^{36500.000.00001} - 24}{23}$$

[5] On élimine la soustraction de 24 et la division par 23, qui, à cet ordre de grandeur, sont négligeables, et on substitue 25 à 24 comme nombre de lettres de l'alphabet (et sans le dire, Leibniz remplace par 0 le 1 final de l'exposant). On obtient comme nombre des « livres » possibles :

$25^{36500.000.00000}$, qui, puisque $25 = 5^2$, est aussi $= 5^{73000.000.00000}$,

[6] « Ou enfin pour aller à la dernière simplicité, mais avec une augmentation immense du nombre, prenons $10^{73000.000.00000}$, ce qui est la même chose, comme s'il y avait 100 lettres de l'Alphabet au lieu de 24 ».

Le nombre N de tous les « livres » possibles = $10^{73000.000.00000}$

Ou *log* N = 7300000000000. (Il s'agit bien sûr du logarithme décimal).

« Ce qui suffit pour le concevoir distinctement ».

Le nombre de tous les livres possibles est le nombre dont le logarithme est égal à 73 suivi de 11 zéros. « Car pour l'écrire tout au long, il faudrait mettre une unité, suivie de 73000.000.00000 zéros » (p. 52).

« Et pourtant un nombre si borné (qu'on comprend aisément sans l'écrire ou sans l'imprimer au long, et dont le logarithme n'est que de 12 chiffres[1]), surpasse d'un excès immense le nombre de toutes les vérités et de toutes les faussetés énonçables par les hommes ; et il surpasse de même le nombre de tous les livres possibles qu'un homme puisse lire ».

[1] Lapsus : il faut 13 chiffres ! mais cela n'affecte pas l'argument.