L'ART COMBINATOIRE ARABE

Pascal CROZET (SPHERE)
Séminaire *Ars combinatoria*, 16 février 2018

PLAN

1) Panorama général, du VIII^{e} siècle au XVI^{e} siècle.

- du *Kitāb al-ʿayn*
  d'al-Khalīl ibn Aḥmad
  au
  Sur la détermination des éventualités combinables à partir d'un nombre quelconque
  d'Ibrāhīm al-Ḥalabī

- une histoire de l'autonomisation de l'analyse combinatoire

Suggestion bibliographique :
Roshdi Rashed : « Algèbre et linguistique: les débuts de l'analyse combinatoire », *D'al-Khwārizmī à Descartes*, Hermann (Paris, 2011), pp. 111-132.

2) Combinatoire et rapports composés : Thābit ibn Qurra et Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī

I. LINGUISTIQUE ET COMBINATOIRE

al-Khalīl ibn Aḥmad (718-786)

- arithmétique
- musicologue
- phonologie, prosodie, lexicographie, grammaire, etc.

Kitāb al-ʿayn (كتاب العين)

Un dictionnaire (et non un lexique) rédigé par lui et son élève al-Layth

Dans l'introduction :

- la langue est une partie phonétiquement réalisée de la langue possible
- les mots de la langue possible s'obtiennent par combinaison et permutation des lettres
- les mots de la langue sont les mots de la langue possible qui vérifient des règles de compatibilité phonétique et sont effectivement utilisés

Deux tâches :

- combinatoire
- phonologique (+ considérations ethnolinguistiques, historiques, etc.)

Les mots arabes sont soit bilitères, soit trilitères, soit quadrilitères, soit quinquilitères.

Pour r compris entre 2 et 5, il calcule le nombre de combinaisons sans répétitions des r lettres de l'alphabet et ensuite le nombre de permutations de chaque groupe de r lettres.

D'après Hamza al-Iṣfahānī (X^{e} siècle), tranmis par al-Suyūṭī :

> Al-Iṣfahānī écrit : ‘Al-Khalīl a mentionné dans son *Kitāb al-ʿayn* que le nombre de ces formes (racines) de la langue des Arabes, celles utilisées et celles négligées pour les quatre rangs – bilitères, trilitères, quadrilitères et quinquilitères – sans répétition, est de douze mille mille, trois cent mille, cinq mille, quatre-cent douze.

Il détaille :
- bilitères : 756 (A_{28}^{2})
- trilières : 19 656 (A_{28}^{3})
- quadrilitères : 491 400 (A_{28}^{4})
- quinquilitères : 11 793 600 (A_{28}^{5})

La somme est bien 12 305 412

Ibn Khadūn (*Prolégomènes*) donne des détails sur ce qui aurait pu être la méthode calculatoire d'al-Khalīl, par l'usage de combinaisons.

al-Khalīl utilise également les permutations :

> Sache qu'un mot bilitère prend deux formes, comme *qd*, *dq* ; *šd*, *dš* ; les mots trilitères prennent six formes qu'on appelle *masdūsa*, « en forme de six », comme *ḏrb*, *ḏbr*, *brḏ*, *bḏr*, *rḏb*, *rbḏ*. Le mot quadrilitère prend vingt-quatre formes puisque ses lettres, qui sont quatre, sont multipliées par le nombre de formes du trilitère, quui est six ; on obtient trente-quatre formes […]. Le mot quinquilitère prend cent-vingt formes car ses letres, qui sont cinq, sont multipliées par les formes des quadrilitères qui sont vingt-quatre; ce qui donne cent-vingt formes, dont seule un petit nombre est utilisé et le plus grand négligé.

Phonologie : neuf grands classes, depuis les laryngales jusqu'aux labiales (29 lettres en introduisant le hamza) :

1	ʿ	*ḥ*	*h*	*ḫ*	*ġ*
2	*q*	*k*			
3	*ǧ*	*š*	*ḍ*		
4	*ṣ*	*s*	*z*		
5	*ṭ*	*t*	*d*		
6	*ẓ*	*ḏ*	*ṯ*		
7	*r*	*l*	*n*		
8	*f*	*b*	*m*		
9	*ī*	*ū*	*ā*	ʾ	

Avec des règles, comme :
- les deux premières lettres d'un mot ne peuvent être d'une même classe, ni souvent d'une classe voisine ;
- les deux dernières lettres non plus, mais peuvent être identiques, etc.

Destin du *Kitāb al-ʿayn* : départ d'une tradition lexicographique.

On considère cette étude combinatoire comme « une sorte de calcul ».

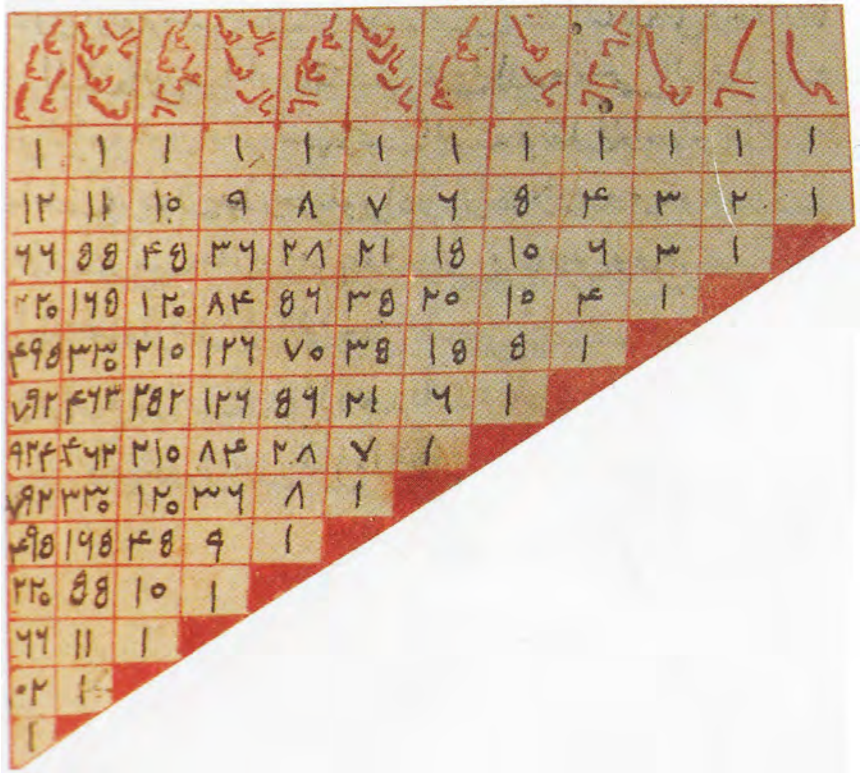
Autres travaux d'al-Khalīl : prosodie, cryptologie

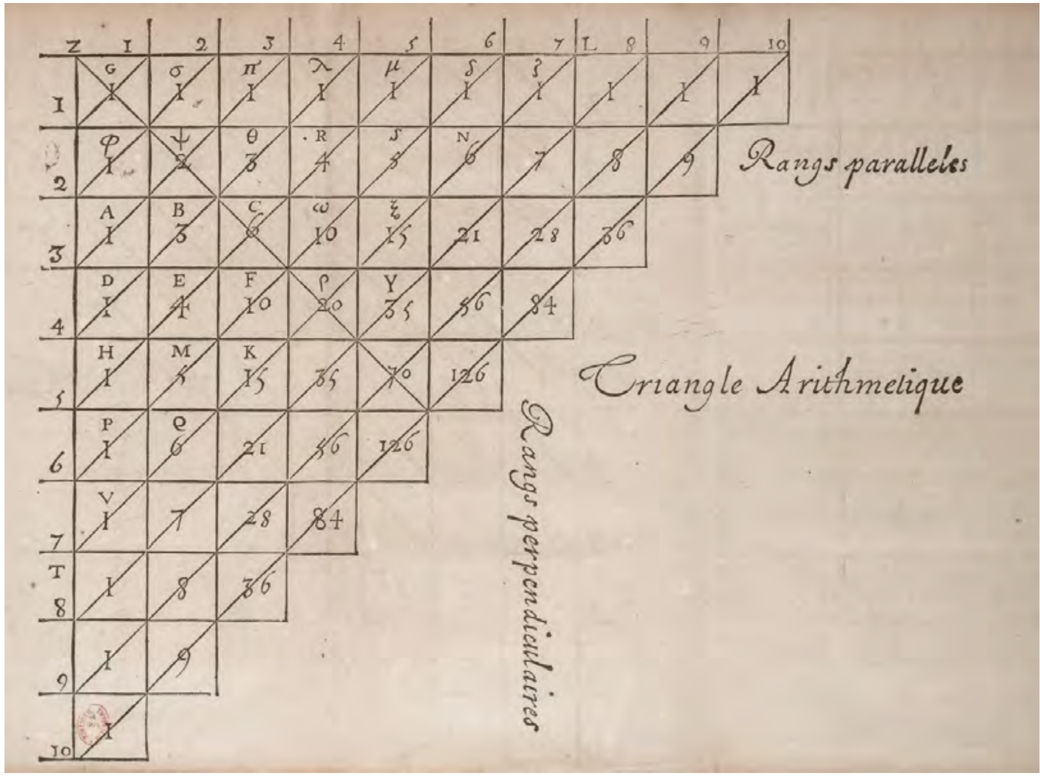
II. ALGÈBRE ET COMBINATOIRE

al-Khwarizmī : entre 813 et 833

Une nouvelle discipline

al-Karağī : fin Xᵉ – début XIᵉ, début de l'algèbre des polynômes





Formule du binôme :

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k\, a^k b^{n-k}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$$

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

al-Karajī – al-Samaw’al

Propriétés du triangle : démonstration par induction complète.

III. APPLICATION DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE

Très grande diffusion du triangle, en particulier dans les livres arithmétiques

1) <u>Retour sur la lexicographie</u>

On fait le lien avec entre les travaux d’al-Khalīl et le triangle arithmétique.

- Ibn al-Munʿim (mort en 1228) reprend explicitement le projet combinatoire d’al-Khalīl, mais en l’étendant à tous les mots de moins de 10 lettres, et pas seulement les racines. Il s’exprime ainsi :

> On dispose de dix couleurs de soie. On voudrait constituer des touffes dont certaines sont d’une seule couleur, d’autres de deux couleurs, d’autres encore de trois couleurs, jusqu’à ce que la dernière touffe soit constituée de dix couleurs ; et on voudrait connaître le nombre de chaque type de touffe pris tout seul.

Et il donne alors le triangle arithmétique.

- Ibn al-Bannā’ (mort en 1321, source vraisemblable d’Ibn Khaldun) met explicitement en rapport les combinaisons utilisées en lexicographie et les nombres figurés (issus de la tradition néo-pythagoricienne)

2) <u>En théorie des nombres</u>

- Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī (1201-1273) est l’un de ceux qui donnent une interprétation combinatoire au triangle arithmétique et à sa loi de formation.

- D’une façon beaucoup plus générale qu’Ibn al-Banna’, Kamal-al-Dīin al-Fārisī (mort en 1319) étudie les nombres figurés. Il les associe d’une manière systématique aux coefficients du binôme = les combinaisons = les éléments du triangle.

Pour étudier le nombre de parties aliquotes d’un nombre (=ses diviseurs propres), il renvoie aux combinaisons.

3) En métaphysique

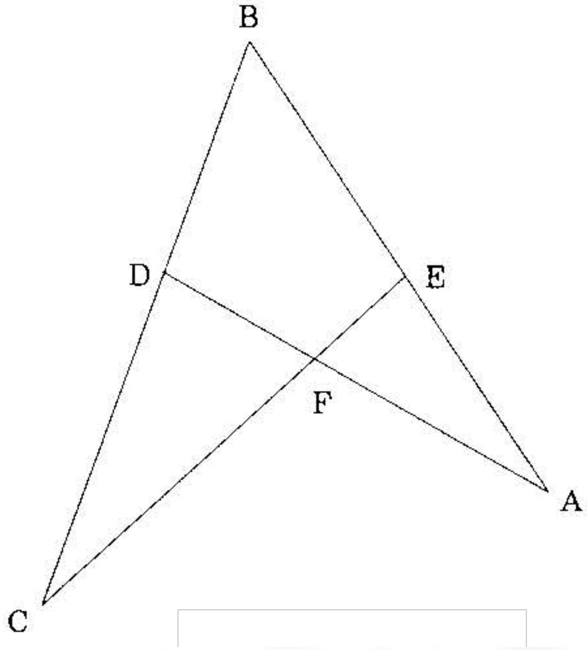
Dans un traité métaphysique intitulé *Sur la démonstration du mode de l'émanation des choses en nombre infini à partir du principe premier unique*, Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī reprend l'ontologie d'Avicenne pour traiter de façon combinatoire le problème de l'émanation des intellects. Il utilise là encore les coefficients binômiaux.

IV. IBRĀHĪM AL-ḤALABĪ (XVI^{E} SIÈCLE)

Traité sur l'analyse combinatoire : *Sur la détermination des éventualités combinables à partir d'un nombre quelconque*

RAPPORTS COMPOSÉS

Théorème de Ménélaüs (Ptolémée) :



$$\frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FD} \cdot \frac{CD}{CB}.$$

Thābit ibn Qurra (826-901) rédige un traité sur les rapports composés.

Point de départ d'un tradition : al-Siğzī, Aḥmad ibn Yūsuf, Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī, Campanus, Cardan, Maurolico…

Touche des points importants pour l'histoire des mathématiques classiques.

Le traité a trois chapitres :

1. Le premier chapitre traite des rapports composés les uns aux autres.
2. Le second chapitre traite de la connaissance des grandeurs dont les rapports sont composés les uns aux autres.
3. Le troisième chapitre traite de problèmes résolus à l'aide de la composition des rapports.

Que nous apprend sur les grandeurs mises en jeu une relation de composition de rapports ?

Soit six grandeurs différentes A, B, C, D, E, F :

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \otimes \frac{E}{F}$$

Que peut-on déduire de cette relation ?
- les 6 grandeurs sont différentes ?
- deux d'entre elles sont égales, etc.

En partant de

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \otimes \frac{E}{F},$$

il peut énoncer dix-sept autres relations de composition (plus les 18 inverses).

Ces relations sont obtenues par permutation du sextuplet (A, B, C, D, E, F), mais toutes les permutations ne sont pas admissibles puisque le rapport A/D, par exemple, ne peut être composé de deux autres rapports où interviendraient les quatre autres grandeurs.

Il s'agit ensuite de démontrer chacune des 17 relations.
Raisonnement purement combinatoire.

Exemple de la 5e relation.
Il s'agit de démontrer que

si $$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\otimes\frac{E}{F},$$ alors $$\frac{A}{E}=\frac{B}{F}\otimes\frac{C}{D}.$$

Or il a déjà démontré (il s'agit respectivement de la quatrième et de la première relation) que

$$\frac{A}{E}=\frac{B}{D}\otimes\frac{C}{F}.$$

et que

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{F}\otimes\frac{E}{D}.$$

Il suffit alors, dans cette dernière relation, de remplacer *A* par *A*, *B* par *E*, *C* par *B*, *D* par *D*, *E* par *C* et *F* par *F*, autrement dit substituer aux grandeurs de la relation d'origine les grandeurs qui occupent le même rang dans la quatrième relation, pour obtenir le résultat recherché, à savoir

$$\frac{A}{E}=\frac{B}{F}\otimes\frac{C}{D},$$

cette substitution étant simplement exprimée par Thābit de la façon suivante :

> La première devient alors *A*, la deuxième *E*, la troisième *B*, la quatrième *D*, la cinquième *C* et la sixième *F*.

Autrement dit, en partant des permutations admissibles σ_1 et σ_4, il démontre que la permutation σ_5 est également admissible en démontrant que

$$\sigma_5 = \sigma_1 \quad \sigma_4 .$$

On peut alors résumer ainsi la tâche que se propose le mathématicien dans cette première partie du second chapitre : dresser la liste, dans la mesure du possible en suivant l'ordre lexicographique, des images du sextuplet (*A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*) par toutes les permutations admissibles, l'admissibilité devant être démontrée, autant que faire se peut, en composant des permutations admissibles[1].

A l'issue de ces démonstrations et après avoir remarqué, au moyen d'un corollaire obtenu en cours de route (« pour tout rapport composé de deux rapports, l'inverse de ce rapport-ci est composé de l'inverse de ces deux rapports-là »), que dix-huit autres relations peuvent être obtenues par passage à l'inverse, il résume l'ensemble de ses résultats dans un premier tableau :

septième	sixième	cinquième	quatrième	troisième	deuxième	première
origine	*F*	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*
1	*D*	*E*	*F*	*C*	*B*	*A*
2	*F*	*E*	*D*	*B*	*C*	*A*
3	*D*	*E*	*F*	*B*	*C*	*A*
0	0	0	0	0	*D*	*A*
4	*F*	*C*	*D*	*B*	*E*	*A*
5	*D*	*C*	*F*	*B*	*E*	*A*
0	0	0	0	0	*F*	*A*
0	0	0	0	0	*C*	*B*
8	*E*	*F*	*C*	*A*	*D*	*B*
9	*C*	*F*	*E*	*A*	*D*	*B*
0	0	0	0	0	*E*	*B*
10	*E*	*D*	*C*	*A*	*F*	*B*
11	*C*	*D*	*E*	*A*	*F*	*B*
6	*E*	*F*	*B*	*A*	*D*	*C*
12	*B*	*F*	*E*	*A*	*D*	*C*
0	0	0	0	0	*E*	*C*
13	*E*	*D*	*B*	*A*	*F*	*C*
14	*B*	*D*	*E*	*A*	*F*	*C*
15	*F*	*C*	*A*	*B*	*E*	*D*
16	*A*	*C*	*F*	*B*	*E*	*D*
0	0	0	0	0	*F*	*D*
7	*C*	*D*	*B*	*A*	*F*	*E*
17	*B*	*D*	*C*	*A*	*F*	*E*

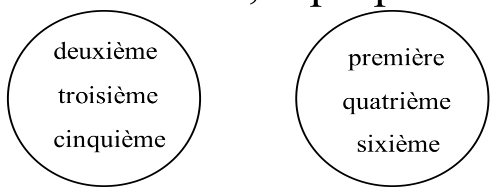
En transposant le commentaire qu'il donne le mathématicien, si l'on note [1], [2], [3], [4], [5] et [6] les contenus respectifs des six colonnes de droite pour une ligne donnée, on aura :

$$\frac{[1]}{[2]} = \frac{[3]}{[4]} \otimes \frac{[5]}{[6]}.$$

Thābit introduit ensuite la notion la plus originale de son étude, la notion de *champ* (*hayyiz*) :

> Il apparaît là clairement que, si nous partageons les six grandeurs en deux groupes, que nous posons la première d'entre elles, la quatrième et la sixième dans un groupe, et que nous posons les <grandeurs> restantes, soit la deuxième, la troisième et la cinquième, dans un autre groupe, alors le rapport de toute grandeur se trouvant dans l'un des deux groupes à une grandeur de l'autre groupe, quelle qu'elle soit, est composé des rapports des grandeurs restantes. Quant au rapport <d'une grandeur> à ce qui se trouve dans son groupe, il n'est pas composé des rapports restants. Que chacun des groupes soit appelé un *champ*, que le groupe dans lequel se trouve le premier nombre soit appelé le *premier champ*, et que l'autre groupe soit appelé le *deuxième champ*.

Et, pour mieux marquer l'imagination de son lecteur, il propose en outre le schéma suivant :



Donc si

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \otimes \frac{E}{F},$$

alors

$$A \times D \times F = B \times C \times E,$$

autrement dit le produit des grandeurs du premier champ est égal au produit des grandeurs du second, ce qu'il exprimera dans ce troisième chapitre dans des termes voisins :

> Ce qui vient du produit d'une des grandeurs qui sont dans le premier champ par une autre grandeur parmi elles, et de ce que l'on a obtenu par la troisième, est égal à ce qui vient du produit d'une des grandeurs qui sont dans le deuxième champ, quelle qu'elle soit, par une autre grandeur parmi elles, et de ce que l'on a obtenu par la troisième.

Cette notion est bien ici le résultat d'une méthode proprement combinatoire ; elle ouvre la voie en particulier à un dénombrement de toutes les relations de composition possibles en utilisant un produit d'arrangements, ce qui sera la voie explorée plus tard par Nasīr al-Dīn al-Tūsī : on a bien en effet :

$$36 = \mathrm{A}_3^3 \times \mathrm{A}_3^3$$

Les cas et les items par lesquels cela est démontré	Ce qui résulte, de l'égalité, de la proportion ou du doublement du rapport	Les deux grandeurs restantes		Les deux autres grandeurs égales entre elles		Les deux premières grandeurs égales entre elles	
huitième	septième	sixième	cinquième	quatrième	troisième	deuxième	première
1	égalité	*F*	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*
1	proportion aux deux autres	*F*	*D*	*E*	*C*	*B*	*A*
1	égalité	*E*	*D*	*F*	*C*	*B*	*A*
1	égalité	*F*	*C*	*E*	*D*	*B*	*A*
1	proportion aux deux autres	*E*	*C*	*F*	*D*	*B*	*A*
1	égalité	*D*	*C*	*F*	*E*	*B*	*A*
2	égalité	*F*	*E*	*D*	*B*	*C*	*A*
2	proportion aux deux autres	*F*	*D*	*E*	*B*	*C*	*A*
2	égalité	*E*	*D*	*F*	*B*	*C*	*A*
2	égalité	*F*	*B*	*E*	*D*	*C*	*A*
2	proportion aux deux autres	*E*	*B*	*F*	*D*	*C*	*A*
2	égalité	*D*	*B*	*F*	*E*	*C*	*A*
7	doublé par répétition	*F*	*E*	*C*	*B*	*D*	*A*
13	doublé par répétition	*F*	*C*	*E*	*B*	*D*	*A*
5	proportion aux deux premières	*E*	*C*	*F*	*B*	*D*	*A*
(…)	(…)	(…)	(…)	(…)	(…)	(…)	(…)

CONCLUSION